Question de cours méthode d'Euler

1 Schéma d'Euler

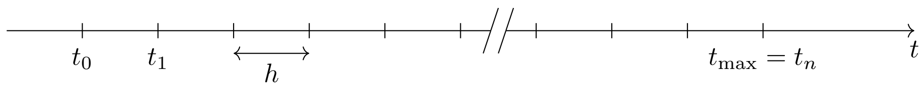
On a une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y,t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

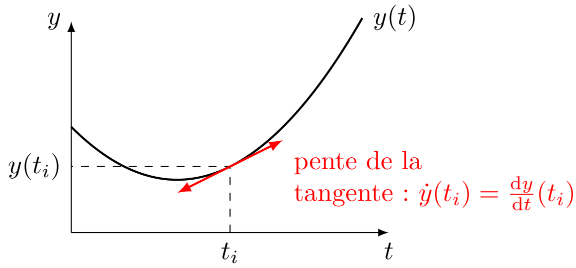
à résoudre sur l'intervalle $I = [t_0, t_{\max}]$.

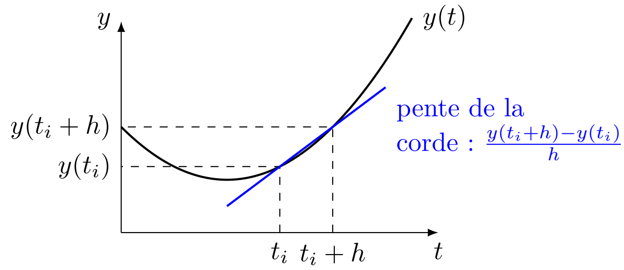
On divise l'intervalle I en n intervalles de même longueur en définissant les instants t_i par :

$$t_i = t_0 + ih \qquad \text{avec} \qquad h = \frac{t_{\max} - t_0}{n} \quad \text{le pas d'intégration.}$$



On peut ensuite remarquer que la dérivée de la fonction y à un instant t_i est la pente de la tangente à la courbe représentative de cette fonction en $t = t_i$:





Mathématiquement, la pente de la tangente en $t = t_i$ peut s'écrire comme :

$$\dot{y}(t_i) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_i) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h}.$$

Si h est suffisamment petit, on peut écrire :

$$\dot{y}(t_i) \simeq \frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h}.$$

En injectant cette expression dans l'équation différentielle, on a :

$$\begin{aligned} \frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h} &\simeq f(y_i, t_i) \\ y(t_i + h) &\simeq y(t_i) + h\, f(y_i, t_i) \\ y(t_{i+1}) &\simeq y(t_i) + h\, f(y_i, t_i) \end{aligned}$$

Le schéma d'Euler explicite consiste à définir la suite suivante :

$$\boxed{\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i) \end{cases}}$$

On peut montrer que si h est suffisamment petit, les valeurs données par la suite y_i sont de bonnes approximations des valeurs exactes $y(t_i)$ de la solution de l'équation différentielle.

2 Méthode d'Euler avec python

On veut résoudre :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}, \qquad \text{avec} \qquad u_C(0) = U_0 = 2\mathrm{V}$$

On prend $E = 10\,V$, $\tau = 10\,\mathrm{ms}$ (ou toutes autres valeurs raisonnables en TP).
On peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E - u_C}{\tau} = f(u_C).$$

Ici la fonction f ne dépend pas du temps.
Le schéma d'Euler s'écrit alors :

$$u_{C,i+1} = u_{C,i} + hf(u_{C,i})$$
$$u_{C,i+1} = u_{C,i} + h\frac{E - u_{C,i}}{\tau}$$

On choisit d'appliquer la méthode d'Euler avec $n = 1000$.
Code demandé : il faut savoir écrire les lignes 11 à 26.

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  # Paramètres du problème
5  tau = 10e-3  # s
6  E = 10  # V
7  t0 = 0
8  tmax = 10*tau  # Pour voir la charge du condensateur
9  uc0 = 2  # V
10
11 # Initialisation du pas de temps
12 n = 1000  # nombre de pas de temps
13 h = (tmax-t0)/n  # pas de temps
14
15 # Tableau des valeurs de t
16 t = np.linspace(t0, tmax, n+1)  # n+1 valeurs qui délimitent bien n intervalles
17
18 # Initialisation du tableau des valeurs de uc
19 uc = np.zeros(n+1)  # tableau à n+1 éléments nuls
20
21 # Condition initiale
22 uc[0] = uc0
23
24 # On peut ensuite calculer toutes les valeurs de uc[i] de proche en proche
25 for i in range(n):
26     uc[i+1] = uc[i] + h*(E-uc[i])/tau
27
28 # Tracé du graphique  (optionnel)
29 plt.plot(t, uc)
30 plt.xlabel('t (s)')
31 plt.ylabel('uc (V)')
32 plt.show()
```